ÉPREUVE PRATIQUE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 3 heures

L'usage des calculatrices de poche est autorisé et recommandé.

Les candidats sont priés d'indiquer la marque et le modèle de leur machine et de préciser si elle est programmable.

Dans chaque question, un certain nombre de résultats numériques intermédiaires sont demandés; il est recommandé de les fournir sous forme de tableaux de nombres. La seule donnée du résultat final est considérée comme insuffisante. On appréciera aussi les indications sur la méthode de calcul, données sous forme d'organigramme ou de programme BASIC.

La deuxième partie est indépendante des questions I, 2° à I, 10°, pourvu que l'on dispose d'une approximation de $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$ à 10^{-10} près.

I

La première partie est consacrée au calcul approché des racines carrées de 3 et 5.

1° Soit a un nombre réel strictement positif. On donne un nombre réel $x \neq 0$ et l'on définit une suite $(x_m)_{m \geq 0}$ de nombres réels par les règles (que l'on justifiera) :

$$x_0 = x, \quad x_{2n+1} = \frac{a}{x_{2n}}, \quad x_{2n+2} = \frac{1}{2}(x_{2n} + x_{2n+1}).$$

Étudier l'existence d'une limite x_∞ de cette suite.

2° Soit $N \geq 1$ un entier. Avec les notations précédentes, soit m un entier tel que x_m et x_{m-1} aient les mêmes décimales après la virgule jusqu'au rang N. Quel renseignement cela donne-t-il sur la limite x_∞ ?

3° Calculer $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$ à 10^{-9} près par la méthode précédente : on prendra a égal à 3 ou 5, x égal à 2, et l'on déterminera les nombres $x_0, x_1, \ldots, x_m$, l'entier m étant le plus petit tel que x_m et x_{m-1} aient les mêmes décimales après la virgule jusqu'à un rang N convenable.

Discuter les sources d'erreur possibles dans le résultat obtenu.

Comparer avec les valeurs fournies par la fonction « racine carrée » de votre machine.

4° Montrer qu'il existe deux suites d'entiers p_m et q_m $(m \geq 0)$ satisfaisant à la relation :

$$(2 + \sqrt{3})^m = p_m + q_m \sqrt{3}.$$

On donnera une relation de récurrence pour calculer ces nombres et on l'appliquera à calculer les suites $p_0, \ldots, p_M, q_0, \ldots, q_M$ arrêtées à la première fois que q_M dépasse 10^5. Établir la relation $p_m^2 - 3\,q_m^2 = 1$ et en déduire une estimation de $\left|\frac{p_M}{q_M} - \sqrt{3}\right|$. Comparer au résultat du 3°.

5° On pose $r_m = p_{2^m}$, $s_m = q_{2^m}$; donner une formule de récurrence pour ces nombres et montrer que l'on a $x_{2^m} = \frac{r_m}{s_m}$ avec les notations du 1°, dans le cas où $a = 3$, $x = 2$. Calculer la suite des nombres $r_0, \ldots, r_P, s_0, \ldots, s_P$, où P est le plus petit entier pour lequel on ait $s_P > 10^9$.

Donner une estimation de $\left|\frac{r_P}{s_P} - \sqrt{3}\right|$.

6° On définit de nouvelles suites par les relations :

$$(2 + \sqrt{5})^m = p'_m + q'_m \sqrt{5}, \; r'_m = p_{2^m}, \; s'_m = q_{2^m}.$$

Reprendre les questions 4° et 5° dans ce cas, et en déduire des approximations de $\sqrt{5}$ par des nombres rationnels.

7° La suite des *nombres de Fibonacci* est définie par $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pour $n \geq 2$. Établir la relation $\tau^n = F_{n-1}\tau + F_{n-2}$ (pour $n \geq 2$), où le nombre τ est égal à $\frac{(\sqrt{5}+1)}{2}$. Démontrer les relations :

$$F_{3m-2} = p'_m - q'_m, \quad F_{3m-1} = 2\,q'_m, \quad F_{3m} = p'_m + q'_m$$

(pour $m \geq 1$) et des résultats du 6° déduire une table de nombres de Fibonacci.

Tournez la page S. V. P.

8° On pose $K = 10^9$ et $L = K(K-1)(K+1)$. Soit A un nombre entier tel que $0 \leqslant A < L$; on lui associe les trois nombres A_0, A_{-1}, A_1 où A_l est le reste de la division de A par $K + l$ pour l égal à 0, -1 ou 1. Donner une méthode *pratique* pour reconstituer le nombre A à partir des nombres A_0, A_{-1} et A_1. On dira que la suite (A_0, A_{-1}, A_1) est le *code* de A.

9° On définit Q comme le plus grand entier positif pour lequel on ait $r_Q < L$ et de manière analogue Q' tel que $r'_{Q'} < L$. Par utilisation des formules de récurrence, calculer les *codes* des nombres $r_0, \ldots, r_Q, s_0, \ldots, s_Q, r'_0, \ldots, r'_{Q'}, s'_0, \ldots, s'_{Q'}$, qu'on donnera sous forme de tableaux.

10° De ce qui précède, déduire la valeur (sous forme décimale) des nombres $r_Q, s_Q, r'_{Q'}$, et $s'_{Q'}$. Indiquer les approximations de $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$ par des nombres rationnels que l'on obtient ainsi.

II

On pose $j = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3} = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ et de manière analogue $t = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ et $z = e^{\frac{2\pi i}{15}}$. On note D_n l'ensemble des entiers compris entre 0 et $n-1$.

1° Démontrer qu'il existe une bijection f de $D_3 \times D_5$ sur D_{15} caractérisée par la formule :

$$j^a t^b = z^{f(a,b)}.$$

On donnera les valeurs de f sous forme de tableau.

2° Rappeler les démonstrations des relations :

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \qquad \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \qquad \sin\frac{2\pi}{5} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}.$$

En déduire une expression des puissances $z^0, z^1, \ldots, z^{14}$ au moyen des nombres :

$$i = \sqrt{-1}, \sqrt{3}, \sqrt{5} \text{ et } \sigma = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}.$$

3° Déterminer σ à 10^{-10} près par l'algorithme de I, 1°.

4° Donner un tableau des parties réelles et imaginaires des nombres $z^0, z^1, \ldots, z^{14}$ à 10^{-10} près en utilisant les résultats de II, 2° et II, 3°. Comparer aux valeurs fournies par les fonctions trigonométriques de votre machine.

5° On introduit les matrices carrées :

$$F(3) = (j^{2ab}) \qquad 0 \leqslant a \leqslant 2,\ 0 \leqslant b \leqslant 2$$

$$F(5) = (t^{3ab}) \qquad 0 \leqslant a \leqslant 4,\ 0 \leqslant b \leqslant 4$$

$$F(15) = (z^{ab}) \qquad 0 \leqslant a \leqslant 14,\ 0 \leqslant b \leqslant 14$$

d'ordre 3, 5 et 15 respectivement. Pour tout vecteur colonne x de composantes $x_0, \ldots, x_{14}$, on note $M(x)$ la matrice à 3 lignes et 5 colonnes d'éléments $x_{f(a,b)}$ où $0 \leqslant a \leqslant 2$, $0 \leqslant b \leqslant 4$ (où f désigne la bijection construite en II, 1°). Établir l'identité :

$$M(y) = F(3)\, M(x)\, F(5) \text{ où } y = F(15)\, x.$$

6° Interpréter le résultat de II, 5° en représentant F (15) comme le produit de deux matrices F' (3) et F' (5) à 15 lignes et 15 colonnes dont les éléments non nuls sont respectivement des puissances de j et de t. On explicitera ces matrices.

7° On introduit la fonction $\varphi : x \longrightarrow (1-2x)^2$ sur l'intervalle [0, 1] et ses coefficients de Fourier :

$$c_m = \int_0^1 \varphi(x)\, e^{2\pi i x m}\, dx,$$

qu'on calculera en fonction de m.

8° On remplace les intégrales précédentes par des sommes de Riemann :

$$c'_m = \frac{1}{15} \sum_{n=0}^{14} \varphi\left(\frac{a}{15}\right) z^{am} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant m \leqslant 14.$$

On demande de calculer ces nombres par la méthode de II, 5° (qui est un cas particulier de la « transformation de Fourier rapide », très utilisée en pratique). Comparer avec le résultat du II, 7°.

• • •